Trabajo Fin de Grado

Creatividad en la resolución de problemas matemáticos

Autor/es

Pablo Abad Domec

Director/es

Elena Mengual Bretón

Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación. Campus de Huesca.

Año 2019-2020

Índice

Creatividad en la resolución de problemas matemáticos

Creativity in solving mathematical problems

- Elaborado por Pablo Abad Domec.

- Dirigido por Elena Mengual Bretón.

- Presentado para su defensa en la convocatoria de Junio del año 2020

- Número de palabras (sin incluir anexos): 10.281

Resumen

La enseñanza de las matemáticas mediante el uso de la creatividad es una estrategia a desarrollar en la educación primaria de hoy en día. En este trabajo se quiere poner de manifiesto la importancia de usar la creatividad como base de la enseñanza de las matemáticas, y cómo aplicarla. Para ello se realiza un estudio sobre los principales autores que tratan el tema de la creatividad en la enseñanza y más en concreto en el campo de la matemática y en la resolución de problemas. Se pone en práctica la propuesta, con diferentes estrategias planteadas por autores expertos, realizando varias resoluciones de problemas de libros de texto, informe PISA y TIMMS.

Palabras clave

Habilidades del pensamiento, creatividad, matemáticas, resolución de problemas, educación.

Abstract

Teaching mathematics through the use of creativity is a strategy to be developed in today's primary education. In this work, we want to highlight the importance of using creativity as the basis for teaching mathematics, and how to apply it. For this purpose, a study is carried out about the main authors who deal with the subject of creativity in teaching, and more specifically in the field of mathematics and problem solving. The proposal is put into practice, with different strategies proposed by expert authors, carrying out various resolutions of textbook problems, PISA report and TIMMS.

Keywords

Thinking skills, creativity, mathematics, problem resolution, education.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta la idea del uso de la creatividad a la hora de trabajar las matemáticas, y más en especial la resolución de problemas, en la educación primaria. Para ello, se realiza un estudio sobre las habilidades del pensamiento, centrándonos en especial en la habilidad de la creatividad, para posteriormente saber aplicarla en el ámbito de la matemática.

Para el desarrollo de este estudio se ha seguido las ideas de autores que trataban el tema de la creatividad, realizando contrastaciones entre ellos para lograr la mejor definición de creatividad y el mejor método de aplicación.

Este trabajo se estructura en tres partes. La primera parte trata de una revisión teórica de autores que realizan un estudio sobre la creatividad, desde la primera persona que definió la creatividad hasta los estudios más recientes, incluyendo un ejemplo claro sobre creatividad del físico Bohr, y el método de enseñanza de las matemáticas utilizado en Singapur, el cual es pionero en todo el mundo. La segunda parte trata ejemplos prácticos de resolución de problemas según la teoría de Pólya y según las fases de la creatividad acuñadas por Poincaré. La tercera parte se desarrolla una propuesta de resolución de problemas de elaboración propia, en la cual se resuelven problemas de libros de texto de matemáticas, del TIMMS y del informe PISA.

Este proyecto nace del interés por la enseñanza de las matemáticas y, tras indagar y demostrar que no se utiliza la creatividad para enseñar las matemáticas, realizar una propuesta de resolución de problemas mediante métodos más novedosos y diferente a los que se utilizan hoy en día. Llorenç (2011) afirmó que "*Un país que pretende progresar está obligado, en consecuencia, a velar por la inclusión del cultivo de la creatividad en todos los niveles educativos.*" (p.26) , es por eso que hay que destacar la importancia de enseñar a los niños a pensar, que la educación no se centre únicamente en llegar a la respuesta, sino que ponga interés en la forma en la que se llegue, y en demostrar que existen infinitas formas de llegar a ella.

MARCO TEÓRICO

Habilidades del pensamiento

El término habilidades pensamiento apareció en la década de los 70 por un grupo de estudiantes de diversas instituciones, pero no fue hasta 1996 cuando la UNESCO le dio una definición exacta, estableciendo objetivos transversales para la educación, desarrollando el pensamiento reflexivo y metódico, el sentido crítico y autocritico y la capacidad de resolver problemas, la creatividad y el autoaprendizaje.

Las habilidades del pensamiento son los métodos que permiten a los seres humanos procesar la información, adquirir conocimientos y resolver problemas.

"Las habilidades de pensamiento se orientan a la comprensión y a la mejora de la capacidad de razonar del individuo, y enlazan conocimientos para realizar una tarea o dar solución a un problema." (Araya, 2014, p.4)

Según Sternberg (1985), que se basa en teorías de Piaget, Vygostky, Ausubel y Santrock, las habilidades del pensamiento están divididas en tres subteorías:

- Componencial o analítica: "se relaciona la inteligencia con el mundo interior del individuo, identificando con los mecanismos que articulan la conducta inteligente." (Araya, 2014, p.6) A su vez, integra a los metacomponentes, que es la planificación de lo que se va a hacer, los componentes de ejecución, que son las acciones para lograr los resultados y la adquisición de conocimientos, que son el conjunto de procesos para adquirir los conocimientos a partir de la información recibida.

- Experiencial o creativa: "se relaciona con la experiencia del individuo en el mundo, o sea, con la interacción entre el mundo externo e interno" (Araya, 2014, p.6) Momento de la persona en donde más activa y plena está la inteligencia en relación con la resolución de problemas y la realización de tareas.

- Contextual o práctica: "se relaciona la inteligencia con el mundo exterior del individuo y se identifican las tres actividades que, en este contexto, caracterizan a

> la conducta inteligente (…): la adaptación al ambiente, la selección del ambiente y la transformación del ambiente.” (Araya, 2014, p.6y7)

A la hora de desarrollar esas habilidades del pensamiento Manzano (1992) propone varios procedimientos:

- Tareas de ayuda, a la hora de investigaciones, tomas de decisiones, soluciones de problemas… para que conlleve algún nivel de creación de nuevos conocimientos.
- Coherencia entre la evaluación y el diseño pedagógico, dado que el método de evaluación condiciona el cómo y qué se aprende.
- “La enseñanza debe ir acompañada de una estimulación constante de hábitos mentales autorregulatorios, metacognitivos, críticos y creativos.” (Coral, 2014, p.91)
- “La autorregulación hace relación a los hábitos mentales como: estar consciente del propio razonamiento, planificar, presupuestar los recursos que se necesitan, ser sensible a la retroalimentación, y evaluar la eficacia de las propias acciones.” (Coral, 2014, p.91)
- Fomentar el desarrollo de habilidades mentales tales como el comprometerse con la tarea a realizar, perseverar en la búsqueda de soluciones y respuestas en los momentos que no aparezcan inmediatamente, superarse en las capacidades relacionadas con sus conocimientos y que los estándares convencionales no le acoten, sino que genere, confíe y mantenga los suyos propios.

En este trabajo nos vamos a realizar un estudio más detallado de la habilidad del pensamiento experiencial o creativo.

Creatividad

La creatividad es una habilidad del ser humano desde nuestros inicios, pero, a la hora de definirla, ¿sabemos qué es la creatividad?

A lo largo de la historia ha habido muchas personas, la mayoría de ellos psicólogos, que han intentado dar una definición de que es la creatividad, es por eso que hoy en día tenemos miles de definiciones sobre la creatividad, pero ¿cual es cierta? ¿Hay alguna más verdadera que otra? Es por eso que vamos a ir recopilando definiciones de creatividad para definirla lo mejor posible, empezando por el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española.

La creatividad, según la rae, es “la facultad de crear o la capacidad de creación”. Podemos observar, y como era obvio, al definir creatividad nos reconduce a su palabra original, crear, por eso debemos definir la palabra crear, y según la rae, crear es “producir algo de la nada” (p.1). Es decir, que de la rae podríamos decir que la creatividad es la facultad de producir algo de la nada.

Otro diccionario, como es el de María Moliner, nos define la creatividad como “la capacidad para realizar obras artísticas u otras cosas que requieren imaginación” (p. 798)

Esta definición me parece muy interesante debido a que nombra la imaginación, aspecto que otros autores resaltan como primordial.

Unos de los primeros autores que definió la creatividad fue Thurstone (1952, p.4), quien definió la creatividad como “un proceso para formar ideas o hipótesis, verificarlas y comunicar los resultados, suponiendo que el producto creado sea algo nuevo". Y Osborn (1953, p.4) quién la definió como "Aptitud para representar, prever y producir ideas. Conversión de elementos conocidos en algo nuevo, gracias a una imaginación poderosa"

Otra definición sobre la creatividad la dio Flanagan (1968, p.4), que explicó que “La creatividad se muestra al dar existencia a algo novedoso. Lo esencial aquí está en la novedad y la no existencia previa de la idea o producto. La creatividad es demostrada inventando o descubriendo una solución a un problema y en la demostración de cualidades excepcionales en la solución del mismo".

Estos tres autores, que fueron de los primeros en dar una idea sobre que era la creatividad, aunque parezca que decían cosas diferentes ambos se centraban en las mismas ideas, que eran las de producir algo nuevo, es decir, la creatividad se basaba en hacer algo nuevo, dejar atrás lo creado y lo que ya existía y hacer algo que no estuviese hecho, que no existiese. Pero, ¿cómo hacer algo nuevo? Inventando. Creando algo nuevo a través de la imaginación y demostrando cualidades excepcionales, mediante el pensamiento divergente. Es aquí donde aparece Guilford, introduciendo el concepto de pensamiento divergente, postulando que "la creatividad, en sentido limitado, se refiere a las aptitudes que son características de los individuos creadores, como la fluidez, la flexibilidad, la originalidad y el pensamiento divergente".
Guilford (s.f.p.11) define el pensamiento divergente como "aquel pensamiento que elabora criterios de originalidad, inventiva y flexibilidad."

> La producción divergente hace referencia a la capacidad para generar alternativas lógicas a partir de una información dada, cuya importancia se evalúa en función de la variedad, cantidad y relevancia de la producción a partir de la misma fuente (Romo, 1987, p.11).

Posteriormente, Guilford (1950) y Dedboud (1992), proponen ocho habilidades que componen la creatividad, que son la sensibilidad para los problemas, la fluidez, la flexibilidad, la originalidad, la redefinición, el análisis, la síntesis y la penetración.

El hecho de que la creatividad sea crear algo nuevo es la razón por la que el mundo ha progresado. Como decía Llorenç (2011, p.21) "sabemos que la civilización actual ha conseguido sus logros (esto que llamamos progreso) gracias a la creatividad de un gran número de personas a veces reconocidas por la Historia, a veces anónimas."

La creatividad es una habilidad esencial en el mundo en el que hoy vivimos. Gracias a ella hemos llegado a estar donde estamos hoy, con todas las tecnologías, los avances, las comunicaciones…

> "La creatividad es una condición necesaria para el crecimiento de un país, para el desarrollo de la humanidad, para la calidad de lo humano. [...] La creatividad es a la humanidad lo que la evolución a todas las especies. Seremos más humanos cuanto más creativos seamos." Penagos y Aluni (2000, p. 24)

Creatividad en matemáticas

En la enseñanza, el uso de la creatividad es indispensable.

> "Un país que pretende progresar está obligado, en consecuencia, a velar por la inclusión del cultivo de la creatividad en todos los niveles educativos. No basta con educar las aptitudes de los que escogen carreras de Bellas Artes o Diseño. No basta con abordarlas cuando el alumno entra en la universidad. Si intervenimos tarde, hemos dejado escapar todo un potencial que quizá ya no podamos recuperar." Llorenç (2011, p.26)

Los profesores deberíamos incentivar desde que los alumnos entrasen al colegio el uso de la creatividad, basar la enseñanza en la creatividad, haciéndolo un pilar importante en su enseñanza. Hay que motivar e incentivar a los niños a que piensen de manera creativa, que innoven, que no se conformen y se limiten a las teorías y aprendizajes que ya existen.

Los alumnos deben ser capaces y deben tener el estimulo de innovar, de crear, y no ajustarse y ver todo el mundo todo igual. Esto es lo que exponen Chevallard, Bosch y Gascón (1997):

> En las instituciones escolares actuales impera una fuerte tendencia a fraccionar la matemática enseñada. El estudiante se encuentra con unos objetos matemáticos poco relacionados entre sí, con unas estrategias de resolución muy rígidas con problemas relativamente aislados y con una teoría poco relacionada con la práctica matemática concreta. Resulta, en definitiva, que la actividad matemática escolar que llevan a cabo los alumnos no está sostenida a las condiciones de un proceso sostenido y estructurado y, por lo tanto, tiene pocas posibilidades de ser creativa.(p.159)

Esto es lo que pasa con las matemáticas, muchas veces, la mayoría de gente piensa que no existe ninguna relación entre las matemáticas y la creatividad, a pesar de que el pilar básico de las matemáticas sea la resolución de problemas, y que mejor fórmula de resolver los problemas que mediante el uso de la creatividad.

Ginsburg (1996, p.3) sostiene que “la esencia de las matemáticas es pensar creativamente, no simplemente llegar a la respuesta correcta.” Así mismo años después, Eric Mann (2006, p.3), afirmó que “la esencia de las matemáticas es la creatividad.”

Basándonos en esto, llegamos a la conclusión de que la creatividad es esencial a la hora de trabajar las matemáticas, pero no es la única, dado que hay que combinar otras habilidades, como por ejemplo la lógica.

“En matemáticas se necesitan dos modos de pensamiento muy diferentes y complementarios: el pensamiento creativo, para el cual la «intuición» es lo típico, y el analítico, para el cual la «lógica» es lo típico.” Bishop (1981, p.3)

Pehkonen (1997) coincide con esta percepción.

> “En este sentido es esencial el equilibrio entre lógica y creatividad. Además, sostiene que si se pone mucho énfasis en la deducción lógica, se reducirá la creatividad; que lo que se gana en lógica se perderá en creatividad y viceversa; y que para desarrollarse, la creatividad requiere de libertad.”(p.3)

No obstante, Pehkonen (1997, p.3) también afirma, contradiciendo a Bishop que “el pensamiento creativo puede definirse como una combinación de pensamiento lógico y pensamiento divergente, que está basado en la intuición, pero que tiene un objetivo consciente.”

Todo el mundo, en la vida real, a la hora de afrontar un problema hacen uso de la creatividad para buscar una solución o una salida a ese problema, entonces, ¿Por qué a la hora de aprender matemáticas, si las matemáticas es resolución de problemas no utilizamos la creatividad? Esto se fundamenta en idea de Allueva.

“El problema que planteamos es que en los diferentes niveles educativos se realizan actividades de aprendizaje y evaluación relacionadas fundamentalmente con el pensamiento convergente, sin potenciarse suficientemente las habilidades del pensamiento divergente y las habilidades metacognitivas". (Allueva, 2011, p.3)

Krutetskii (1969) y Ellertoh (1986) (p.173) enunciaron “la existencia de una relación implícita entre la habilidad que se requiere para inventar problemas y el nivel de creatividad, así como de su competencia matemática.”

Resolución de problemas

Las matemáticas están basadas en la acción de resolver problemas. A la hora de enseñar matemáticas a los alumnos, toda enseñanza se basa en que los alumnos resuelvan operaciones, las cuales son el problema que tienen para conseguir la solución.

“Un problema es una situación que un individuo o grupo quiere o necesita resolver y para la cual no dispone, en principio, de un camino rápido y directo que le lleve a la solución” Echenique(2006, p.20)

Kilpatrick (1978) afirmaba que existen tres componentes en la resolución de problemas, el problema, el alumno y la situación, donde interviene el profesor.

> “El problema, interrogante o cuestión que se plantea, el alumno (o los alumnos) a quien se plantea el problema para que lo resuelva, y la situación en que resuelve el problema, que en el ámbito educativo es el aula, manejada por el profesor” Kilpatrick (1978, p.3y4)

Es esencial enseñar a los alumnos a que resuelvan problemas por ellos mismos ya que como decía Jonassen (2004, p.5) “aprender a resolver problemas es la destreza más importante que los estudiantes pueden aprender en cualquier lugar del mundo”

A la hora de exponer los problemas a los alumnos, esos problemas deben hacer recapacitar al alumno sobre la respuesta, plantearles un reto para poder llegar a la respuesta correcta, utilizando los conocimientos oportunos, que el alumno considere necesarios, dado que a la hora de resolver un problema hay muchas maneras y caminos que nos llevaran a ella.

Echenique (2006, p.20) decía que “los problemas pueden tener una o varias soluciones y en muchos casos existen diferentes maneras de llegar a ella(s).”

Un ejemplo muy claro de esto es la anécdota de Bohr.

Anécdota de Bohr

Bohr era un estudiante que había realizado un examen de física y el profesor le quería poner un cero, a pesar de que su respuesta era correcta. Es por eso que el profesor solicitó la ayuda de Sir Ernest Rutherford, un científico premio nobel en química en 1908.

La pregunta del examen era: “Demuestre cómo es posible determinar la altura de un edificio con la ayuda de un barómetro.”(Sorando, s.f., p.1) A lo cual Bohr había contestado que ataría una cuerda al barómetro, la descolgaría hasta el suelo y posteriormente mediría la longitud de la cuerda, la cual sería igual a la altura del edificio.

Rutherford y el profesor llamaron a Bohr al despacho y le dijeron que debía volver a resolver el problema, pero esta vez utilizando la física, y en un tiempo de 6 minutos. Cuando llevaba 5 minutos, y no había escrito nada, Rutherford le dijo que si no sabía cómo resolverlo, a lo que Bohr le respondió que no sabía cuál de todas las formas resolverlo, pero finalmente se decanto por una. “Tomo el barómetro y lo lanzo al suelo desde la azotea del edificio, calculo el tiempo de caída con un cronómetro. Después se aplica la fórmula altura = 0,5 · g · t2.” (Sorando, s.f., p.1)

Llegados a este punto, Bohr recibió la máxima nota en física, pero Rutherford no se quedó conforme y fue a buscar a Bohr para preguntarle cuales eran las otras respuestas a la pregunta. Bohr respondió que había muchos métodos.

El primero seria tomar el barómetro un día que hiciese sol y medir la altura del barómetro y la sombra del barómetro y del edificio, y aplicar una proporción. El segundo seria coger el barómetro e ir marcando la altura del barómetro en cada planta del edificio mientras vas subiendo y finalmente contar el número de marcas por la altura del barómetro para hallar la respuesta. Otro sería atar el barómetro a una cuerda y lo sueltas desde la azotea, usándolo de forma que pareciese un péndulo, para calcular la altura utilizando el periodo de precisión. El ultimo consistiría en atar el barómetro a la cuerda y moverlo como si fuese un péndulo, calculando que a la altura de la azotea la gravedad es cero, teniendo en cuenta la aceleración de la gravedad en el momento en que el barómetro desciende de forma circular al atravesar la perpendicular del edificio, utilizando la diferencia de los valores y con formulas trigonométricas.

Finalmente concluye con una anécdota de la forma más fácil de saber la altura del edificio.

> Probablemente, la mejor sea tomar el barómetro y golpear con él la puerta de la casa del portero. Cuando abra, decirle: "Señor portero, aquí tengo un bonito barómetro. Si usted me dice la altura de este edificio, se lo regalo". (Sorando, s.f. p.1)

Posteriormente, Rutherford le dijo si no conocía la respuesta que el profesor le pedía, utilizando la diferencia de presiones entre dos lugares, a lo que Bohr contestó “que la conocía, pero que durante sus estudios, sus profesores habían intentado enseñarle a pensar.” (Sorando, s.f., p.1)

Problema Pólya

George Pólya es un matemático nacido en 1887. Realizó varias aportaciones al campo de las matemáticas, y más en especial, al área de la resolución de problemas.

Pólya proponía que a la hora de resolver los problemas se debía hacer desde una perspectiva global, igual que nos enfrentamos a los problemas en nuestra vida cotidiana.

> “Mi punto de vista es que la parte más importante de la forma de pensar que se desarrolla en matemática es la correcta actitud de la manera de cometer y tratar los problemas, tenemos problemas en la vida diaria, en las ciencias, en la política, tenemos problemas por doquier. La actitud correcta en la forma de pensar puede ser ligeramente diferente de un dominio a otro pero solo tenemos una cabeza y por lo tanto es natural que en definitiva allá sólo un método de acometer toda clase de problemas. Mi opinión personal es que lo central en la enseñanza de la matemática es desarrollar tácticas en la Resolución de Problemas” (Meneses, 2018, p.13)

A la hora de realizar la resolución de problemas, Pólya propone cuatro fases:

- Entender el problema

  Esta fase consiste leer el problema varias veces, imaginártelo en la cabeza, reconocer la información, sacar todos los datos importantes para su resolución, realizar gráficos o tablas…

- Diseñar un plan

  Realización de estrategias posibles para la resolución del problema, y selección de la más adecuada.

- Ejecutar el plan

  Aplicación de la estrategia seleccionada y resolución del problema.

- Examinar la solución

  Revisar el proceso, asegurarse de que el resultado obtenido es correcto y lógico. Analizar otros caminos de solución si se cree necesario.

Fases creatividad vs fases Pólya

En 1908 el científico Henri Poincaré en su libro Science et Méthode propuso cuatro fases de la creatividad:

- Investigación consciente

  Búsqueda de información acerca de lo que se va a crear, investigar trabajos previos similares, y sobre todo plantearse las preguntas adecuadas. En esta fase es muy importante la memoria. Necesita de constancia, rigor y curiosidad.

- Trabajo inconsciente

  Reposo de los conocimientos, para que el inconsciente sea el que actúe.

- Iluminación repentina

Momento en el que llega la respuesta por azar, pero para que eso pase es muy importante la fase previa.

- Comprobación

  Evaluación sobre si es algo útil y si se puede aplicar. El autor es el que debe ejercer de evaluador de una forma rigurosa. Es necesario aplicar los dos polos del pensamiento de la persona creativa, el pensamiento divergente, imaginativo y el pensamiento lógico y racional.

Al observar las fases de la creatividad propuestas por el científico Henri Poincaré no se puede evitar realizar una comparación con las fases propuestas por Pólya. Como se puede observar Poincaré afirma que la creatividad tiene cuatro fases, mientras que Pólya también afirmaba que existían cuatro fases.

Partiendo de la base de que Pólya, cuando enunció estas fases, las estableció únicamente para la resolución de problemas, mientras que Poincaré las enunció para cualquier cosa que requiera creatividad estas fases tienen similitudes pero a su vez son muy desiguales.

Si nos fijamos ambos se apoyan en cuatro fases para llegar a la solución. En la primera fase ambos se plantan ante el problema surgido, le dan vueltas en la cabeza, buscan en conocimientos previos… En la segunda fase Pólya diseña ya el plan de resolución, mientras que Poincaré deja reposar la información en la cabeza, deja que sea el inconsciente el que trabaje mientras que el cerebro se concentra en otros temas. En la fase tres Pólya se lanza a resolver el problema con la estrategia previamente ideada, pero es en este momento en el que Poincaré afirma que llega la estrategia con la que próximamente resolveremos el problema, y llega de repente, cuando se comprende repentinamente. Finalmente, la cuarta y última fase Pólya la dedica a realizar comprobaciones de si es correcta la solución y ver otros caminos para llegar a la solución mientras que Poincaré dice que es en este momento en el que se comprueba si la solución que previamente nos ha venido a la cabeza es la correcta, y la mejor forma de comprobarla es aplicando el método siendo el creador el que la evalúe.

Como se puede observar, Pólya va directo hacia la solución, centrándose únicamente en la resolución del problema planteado, mientras que Poincaré no va directo, sino que propone que se necesita un determinado tiempo para plasmar la idea, y en el caso del método científico resolver el problema.

Además, si nos fijamos en las fases de Pólya, podemos observar que tanto la fase de diseñar un plan, como la fase de examinar la solución, llevan integrada la creatividad, ya que es en esos casos en los que el alumno, tanto como para elegir la estrategia para resolver el problema, como para examinar la solución y buscar otros métodos de resolución tiene que integrar la creatividad.

Método Singapur

El método Singapur es un modelo de enseñanza, creado en 1992, que se basa en la enseñanza de las matemáticas mediante la resolución de problemas, haciendo que los alumnos desarrollen sus propias ideas y conclusiones para adaptarlas a la resolución de problemas en su vida diaria.

Yeap Ban Har (s.f.) afirmaba que “Los niños deberían tener la oportunidad de explorar ideas cuando aprenden por primera vez una nueva idea, utilizando en clase objetos y materiales concretos, y trabajar en equipo con otros niños.”

Este método se fundamenta en tres etapas:

- Etapa concreta, basada en la manipulación de objetos.
- Etapa visual, basada en la representación de los problemas a través de barras.
- Etapa abstracta, que es cuando los alumnos se enfrentan a la operación con los signos correspondientes.

A su vez, Calderón sostiene que el método se basa en tres ideas fundamentales:

- Enfoque CPA, que sostiene que las matemáticas deben ser aprendidas gradualmente desde lo más concreto, hasta alcanzar lo abstracto, pasando por lo pictórico.

- Currículo en espiral, que sugiere que los contenidos de van aprendiendo progresivamente, para que los conceptos se obtengan cuando el alumno este cognitivamente preparado.
- Variación sistémica, la cual se basa en enseñar al alumno diferentes maneras de aprender los conceptos matemáticos, sin memorizar formulas, y que sea él mismo, el que elija el método de hallar la solución.

CASOS PRÁCTICOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problema práctico Pólya

¿Qué pasa si el problema no les sale a la primera a los alumnos? Es ahí donde entra el papel del docente.

En este proceso de resolución de problemas, el docente, tiene un papel muy importante que es el de ayudar al alumno, ofreciendo al alumno la ayuda justa y necesaria. De este modo, cuando a los alumnos se les plantea un problema con dificultad no se debe dejar que el alumno se enfrente solo al problema, de igual modo que no puede resolverlo el docente. Pólya plantea que es importante que el docente se debe poner en la situación de los alumnos, e imaginarse las preguntas y dificultades que les van a surgir a sus alumnos. Además, el docente debe señalar el camino hacia la resolución de distintas formas, para que sean los propios alumnos los que resuelvan los problemas y desarrollar así, la habilidad de resolución de problemas en sus alumnos.

Ejemplo problema PISA resuelto mediante el modelo de Pólya:

> "Durante un trayecto, Elena hizo 4 km durante los 10 primeros minutos y luego 2 km durante los 5 minutos siguientes. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?
>
> A La velocidad media de Elena fue mayor durante los 10 primeros minutos que durante los 5 minutos siguientes.
>
> B La velocidad media de Elena fue la misma durante los 10 primeros minutos que durante los 5 minutos siguientes.

C La velocidad media de Elena fue menor durante los 10 primeros minutos que durante los 5 minutos siguientes.

D No se puede decir nada sobre la velocidad media de Elena a partir de la información facilitada.” (Gobierno España, 2015)

Siguiendo el modelo de Pólya el primer paso es leer varias veces el problema, imaginárselo en la cabeza, sacando los datos importantes, saber cuál es la incógnita. Al ser un problema que nos da todos los datos útiles, y además nos los da en un espacio breve, resulta fácil sacar los datos. De esta forma sabemos que 4 kilómetros le cuestan 10 minutos, y 2 kilómetros 5 minutos.

La siguiente fase consiste en diseñar un plan para resolver el problema. En este momento los alumnos deben realizarse preguntas como si han hecho algún problema parecido a ese, si saben alguna estrategia o teorema para resolverlo, si se puede enunciar de otra forma más fácil, etc. Y escoger una estrategia para resolverlo. En este caso existen muchas maneras de resolverlo, dividiendo los kilómetros por el tiempo para saber cuánto recorren en un minuto, dividir el tiempo por los kilómetros para saber cuánto le cuesta un kilómetro, con reglas de tres, o como puede ser en algunos casos donde se dan opciones, ir descartando las opciones.

Una vez escogido el plan de resolución los alumnos deben ejecutarlo. En este caso vamos a elegir la opción de saber cuánto le cuesta un kilometro en los 10 primeros minutos, y cuanto le cuesta realizar un kilómetro en los últimos 5 minutos para ver cuando fue a mayor velocidad. Al realizar la operación nos sale que un kilómetro en los primeros 10 minutos le costó 2´5 minutos, y que un kilómetro en los últimos 5 minutos le costó 2´5 minutos. De este modo sabemos que en ambos casos le costó exactamente lo mismo, de donde se deduce que la velocidad media fue la misma, respuesta que nos ofrece la opción B, resolviendo así el problema.

Finalmente los alumnos deben examinar la solución obtenida, saber si se puede comprobar esa solución, si tiene sentido la solución, si se puede obtener el resultado de otra forma, si se puede aplicar este método para la resolución de otros problemas…

¿Hay que obligar al niño a que siga esas fases? ¿Hay que obligarlo a que vaya más rápido?

En primer lugar, debemos tener en cuenta que cada niño es diferente de los demás, ya que cada niño tiene su proceso y ritmo de aprendizaje, y no todos aprenden de la misma manera y al mismo tiempo. De esta forma, el docente cuando va a presentar el problema ya sabe que unos alumnos lo resolverán antes que otros, que unos pasarán de fase rápidamente mientras que a otros les costará más. Este hecho no significa que unos lo hagan mejor que otros, sino que a algunos alumnos el proceso de resolución les llevará más tiempo, pero hay que tener claro que la rapidez no es sinónimo de bien hecho. Así pues, no se debe obligar a los alumnos a que vayan más rápido que estas fases, sino que hay que apoyarlo en el proceso de aprendizaje, permitiéndole al alumno que pase a la otra fase cuando haya finalizado una fase, sin hacerle ir más deprisa, sino aceptando que cada alumno necesita un tiempo diferente para procesar información y el docente única y exclusivamente debe proporcionarle apoyo y ayuda cuando sea el alumno el que la solicite. Esta ayuda debe ser en todo momento en forma de guía, permitiendo que sea el niño el que encuentre la solución por él mismo, ya que es de esta forma como adquirirá los conocimientos con mayor firmeza.

Además, el docente sabe que no hay un solo método de resolución de problemas, por lo que aunque él vaya ayudando en la medida de lo posible y necesario a los alumnos, puede ocurrir que algunos alumnos resuelvan el problema de otra forma, siendo esa forma correcta también.

Problema libro de texto según Pólya

“Hay 7 chibolas en cada una de las 4 bolsas adentro de la caja, y hay 2 cajas.

¿Cuántas chibolas hay en total?” (p.69)

Se plantea este problema para alumnos de 3º de primaria, los cuales aun no se han iniciado en el aprendizaje de la multiplicación.

Al presentar este problema a los alumnos se les genera una situación en la que para resolverlo mediante un rápido y sencillo necesitan hacer uso de operaciones que aún no conocen, es por eso que se les genera un problema. De esta forma, los alumnos deben recurrir a otro tipo de estrategias para resolver la incógnita de cuantas chibolas hay en total. Para resolver este problema podemos utilizar el método de Pólya de resolución de problemas.

A la hora de enfrentarse los alumnos a este problema deberán leer y leer el problema para reconocer la información, sacar todos los datos importantes para su resolución, realizar gráficos o tablas… En este caso puede ser interesante que los niños dibujen el problema, que dibujen las bolsas y las cajas para tener el problema plasmado y así poder entenderlo mejor.

Posteriormente los alumnos deben idear estrategias posibles para resolver el problema. Sumar las chibolas de las cuatro bolsas de una caja, y luego sumar las de la otra caja, sumar las bolsas, y luego sumar las chibolas de todas las bolsas, ir contando una a una las chibolas dibujadas, y en el caso de que alguno tenga algún conocimiento sobre la multiplicación, aunque el profesor no las haya explicado en clase aun, realizar la multiplicación de chibolas por bolsa, y multiplicar por las cajas.

Después los alumnos deberán aplicar la estrategia seleccionada para resolver el problema. En este caso, dado que no hemos estudiado la multiplicación vamos a realizar el proceso de sumar el número de chibolas en cada bolsa, sumando las cajas separadas. De esta manera, sumamos las chibolas de las cuatro bolsas de una caja, realizando la suma de 7+7+7+7, dándonos como resultado 28. Así pues, teniendo 28 chibolas en una caja, y observando que las cajas son idénticas, procedemos a sumar las chibolas de las dos cajas, realizando la suma de 28+28, obteniendo como resultado 56 chibolas en total.

Finalmente, los alumnos deben revisar el proceso de resolución, reflexionando sobre si el resultado obtenido es correcto y lógico, y si existe otro tipo de manera de llegar a la solución.

Aprovechando que este problema se ha resuelto mediante la suma repetida de 7, y posteriormente de 28, al profesor aprovechará para dar la primera explicación del proceso de multiplicación, partiendo de este problema.

Problema práctico según fases creatividad

Poincaré, en su libro enunció las fases de la creatividad, las cuales se podían aplicar a cualquier experiencia de la vida, es por eso que aplicándolo a las matemáticas, vamos a resolver este problema geométrico recogido del TIMSS de 2011:

"El patio de la escuela es un cuadrado que mide 100 metros de lado. Ruth recorre todo el borde del patio. ¿Cuánto camina?

- 100 metros
- 200 metros
- 400 metros
- 10.000 metros"(Fraile, 2019, p.49)

En primer lugar comenzamos con la fase uno, investigación consciente. Aquí debemos buscar información sobre el problema, buscar problemas anteriores que traten estos temas y plantearse preguntas que nos ayuden a conseguir resolver el problema. Se pueden plantear problemas como por ejemplo ¿Cuántos lados tiene un cuadrado? ¿Qué significa que mida un lado 100 metros? ¿Qué es el borde del patio? ¿He hecho algún problema de este tipo antes? Etc.

Posteriormente pasamos a la fase dos, dónde según Poincaré debemos dejar reposar los conocimientos y la información adquirida y trabajada en la anterior fase, dejándola que madure y que posteriormente estallara.

La fase tres aparece cuando nos llega la respuesta a la cabeza, cuando conseguimos hallar la estrategia con la que resolver el problema, la cual aplicaremos en la siguiente fase.

En esta fase es cuando habiendo hallado la estrategia de resolución del problema, la aplicamos en el problema planteado. Para esta fase se necesita activar los dos polos del pensamiento, el divergente, imaginativo y el lógico y racional. En este caso la estrategia que hemos planteado es dibujar el patio del colegio, debido a que al dibujar el problema es más fácil llegar a la solución.

100 metros

Al dibujar este cuadrado y observar que un lado mide 100 metros y Ruth al recorrer el borde del patio debe recorrer los cuatro lados, realizamos la operación de la multiplicación. Siendo la longitud de un lado 100 metros, y habiendo 4 lados, multiplicamos 100x4, dándonos como resultado 400 metros recorre Ruth.

A la hora de comprobarlo, y como forma de asegurarse de que está bien el resultado realizamos otra operación, que es la suma. De esta forma, al medir un lado 100 metros y haber cuatro lados, realizamos la operación de la suma, sumando 100+100+100+100, dándonos como resultado 400 metros que recorre Ruth.

Además de haber realizado dos operaciones con el mismo resultado, observamos que una opción de las que nos marca el problema es 400 metros, de esta forma sabemos que es una respuesta irrefutable y seguramente correcta.

PROPUESTA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA FOMENTAR LA CREATIVIDAD

Cuando se plantea un problema, como bien hemos estudiado, hay muchas formas de enfrentarse a él, y una variedad de herramientas para resolverlos.

Partiendo de un problema breve, en el cual los alumnos deban hacer una serie de operaciones simples como puede ser el siguiente, se plantean una serie de herramientas para realizar una correcta resolución de problemas.

Víctor, que tiene 7 años, tiene 20 cromos y su amigo Pedro, que tiene 8 años, tiene 16 cromos. Quieren saber quién tiene más cromos, y conseguir tener el mismo número de cromos. ¿Quién tiene más? ¿Con cuántos cromos se queda cada uno?

A la hora de resolver este problema, debemos seguir una serie de herramientas, que se basarían en una sucesión de pasos para su resolución. En primer lugar, debemos leer el problema varias veces, con el fin de entenderlo en su totalidad. Posteriormente, hay que localizar los datos necesarios para la resolución del mismo, desechando los datos no necesarios, como son en este caso las edades de los dos niños. Más tarde, se debe reflexionar sobre la pregunta expuesta, yendo pregunta por pregunta, individualmente, en el caso de que haya más de una pregunta, como es en este caso. Después, hay que elegir la operación adecuada, realizar una reflexión sobre la operación conveniente para llegar a la respuesta que nos piden. Finalmente realizar la operación para obtener la información demandada por la pregunta.

Centrándonos en este problema, tras leerlo varias veces hasta su completa comprensión, y habiendo eliminado los datos no necesarios, como son las edades de los niños, nos quedamos con los datos de que Víctor tiene 20 cromos y Pedro 16. Dado que ya se han extraído los datos útiles, pasamos al siguiente paso, centrándonos únicamente en la primera pregunta, ¿Quién tiene más?

Según Fuson, 1992; Riley, Greeno y Heller, 1983; Verschaffel y De Corte, 1993 existen cuatro categorías en las que se dividen los problemas matemáticos, de cambio, de combinación, de comparación y de igualación.

La pregunta de ¿Quién tiene más?, requiere que los niños realicen una comparación entre los cromos que tiene Víctor y los que tiene Pedro, por lo tanto observamos que es un problema de comparación, dado que ellos mismos deben comparar los cromos de uno con los del otro para resolver la pregunta.

Finalmente, queda resolver el problema utilizando los datos dados. En este momento, para resolverlo, la mayoría de los niños realizarían una comparación entre el número 20 y el 16, en la cual argumentarían que el número 20 es mayor, resolviendo así el problema, pero como hemos estudiado más arriba no hay una única forma de resolver un problema, de forma que vamos a llegar a la solución utilizando otros métodos más creativos, como pueden ser dibujando, con graficas, utilizando medidas de tiempo, etc.

- Colocamos los dos montones uno al lado de otro, y observamos cual de los dos montones es más grande/alto, y con eso determinaremos quién tiene más cromos.

- Cogemos el paquete de uno de los chicos y cada dos segundos dejamos un cromo en la mesa, contando el tiempo final. Al hacer eso con los dos paquetes observaremos que nos ha costado más tiempo realizar eso con los cromos de Víctor, debido a que él tenía más cromos.

- Ponemos los dos montones uno al lado del otro y procedemos a contar a la vez el número de cromos, cuando lleguemos a 16, nos daremos cuenta que los cromos de Pedro se han acabado, mientras que a Víctor aún le quedan cuatro cromos.

- Utilizando una hoja, iremos colocando una línea cada cierta altura cada vez que contemos un cromo. Al finalizar observaremos que la columna de Víctor, es más alta que la de Pedro, por lo tanto Víctor tiene más cromos.

- Utilizando materiales manipulativos como pueden ser bloques de construcciones, colocaremos un bloque por cada cromo que tiene cada niño. Finalmente, al ver que la torre de Víctor es más alta, deduciremos que Víctor tiene más cromos.

- Cogeremos un montón y por cada cromo iremos dando un paso hacia delante. Si realizamos solos el ejercicio, deberemos marchar el final del trayecto con una marca, para saber hasta dónde hemos avanzado. En el montón que más lejos hayamos llegado será el que más cromos tenga. En el caso de que se haga con más de una persona, el montón de cromos de la persona que más lejos haya llegado será en el que haya más cromos.

Una vez resuelta esta pregunta, podemos pasar a la segunda pregunta, ¿Con cuántos cromos se queda cada uno?

Si seguimos la teoría de Fuson, 1992; Riley, Greeno y Heller, 1983; Verschaffel y De Corte, 1993, donde afirmaban que había cuatro categorías en las que se dividen los problemas matemáticos, de cambio, de combinación, de comparación y de igualación, nos damos cuenta que este problema, al haber que igualar el número de los cromos de los dos niños es un problema de igualación, ya que se iguala el número de los cromos de Víctor y Pedro.

A la hora de resolver este problema, la mayoría de los niños realizarían una simple suma como es la de 20+16, donde sacarían que entre los dos tienen 36 cromos, y dividirían entre dos para saber los cromos que se queda cada uno, dándole como resultado 18, resolviendo así el problema. Pero como hemos estudiado no hay un único método de resolver un problema, de forma que vamos a llegar a la solución utilizando otros métodos más creativos. Además, ¿qué pasa si estamos en cursos más bajos de la educación primaria y no saben realizar la operación de división? En este caso, los niños deberían desarrollar sus propias estrategias a la hora de enfrentarse al problema para conseguir resolverlo.

- Podrían simplemente, teniendo los dos montones separados, sabiendo que Víctor tenía más, ir dándole cromos a Pedro hasta que tuviesen los mismos. En este caso, cuando damos un cromo de Víctor a Pedro debemos restar uno a Víctor y sumárselo a Pedro. Debido a que Víctor tenía 20 y Pedro 16, bastaría con darle solamente dos para que ambos tuviesen 18.

- Juntamos los dos montones, consiguiendo así tener todos los cromos juntos, y vamos dando, de cromo en cromo, un cromo a Víctor y otro a Pedro, hasta que se acaben los cromos, quedándose así con los mismos cromos.

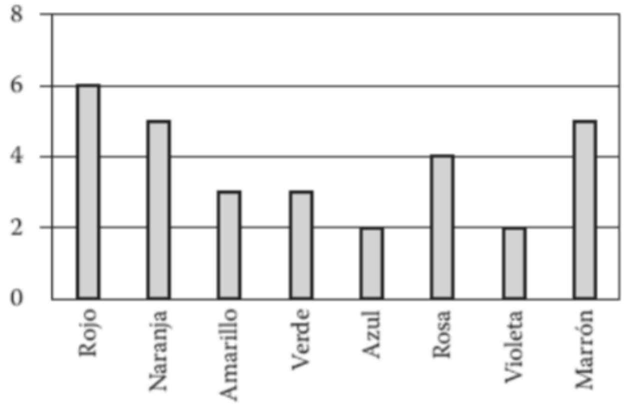
- Utilizando operaciones aritméticas podrían restar a los cromos de Víctor, que es el que tiene más, los cromos de Pedro. 20-16=4. De esta manera, sabrían que en ese momento ambos tendrían el mismo número de cromos, quedando por repartir solamente cuatro cromos, donde solo queda la opción de que se queden dos cada uno, quedándose así con el mismo número de cromos.

- Utilizando materiales manipulativos, como pueden ser bloques de construcciones, podrían formar dos torres con el mismo número de bloques que número de cromos de cada uno. Cuando tuviesen ambas torres formadas, solamente tendrían que igualar la altura de las torres, y contar con cuantos bloques se quedan las torres para saber cuántos cromos se queda cada uno.

- Cogiendo cada niño un montón podrían ir dejando de uno en uno, y a la vez, los cromos en la mesa, hasta que Pedro, en este caso, se quedase sin cromos. En ese momento, del montón de Víctor, en vez de dejarlos solamente en su montón debería ir dejando uno en el suyo y otro en el de Pedro, hasta que se acabasen los cromos.

Otro ejemplo de resolución de problemas, en este caso se resuelve un problema de probabilidad del informe PISA.

> "La madre de Roberto le deja coger un caramelo de una bolsa. Él no puede ver los caramelos. El número de caramelos de cada color que hay en la bolsa se muestra en el siguiente gráfico.



> ¿Cuál es la probabilidad de que Roberto extraiga un caramelo rojo?
>
> A 10%
>
> B 20%
>
> C 25%
>
> D 50%"(Verdejo, 2015)

Hay que tener en cuenta que este problema seria para cursos más altos de la educación primaria, debido a que no es hasta los últimos cursos dónde los alumnos deben resolver problemas que impliquen dominio de los contenidos propios de estadística y probabilidad.

Al ser un problema que resolveríamos en los cursos más avanzados de educación primaria, se da por sentado que los alumnos tienen unos conocimientos previos sobre operaciones matemáticas que se utilizan para resolver este problema.

Al empezar a resolver este problema, como estrategia principal, hay que leer y releer el problema varias veces hasta conseguir entenderlo a la perfección. Posteriormente, debemos sacar los datos principales del problema, desechando los que no afectan a la resolución del problema. En este caso, no tenemos datos inservibles y todos los datos de interés se encuentran en la grafica, la cual debemos saber leer para conseguir los datos de caramelos de distintos colores.

De esta forma, sabemos que tenemos:

- 6 rojos
- 5 naranjas
- 3 amarillos
- 3 verdes
- 2 azules
- 4 rosas
- 2 violetas
- 5 marrones

Con estos datos ya sabemos cuántos caramelos de cada color tenemos, así que hay que reflexionar sobre cuál es el siguiente paso para acercarnos a resolver el problema y dar respuesta a la pregunta de ¿cuál es la probabilidad de que Roberto extraiga un caramelo rojo?

Sabemos cuántos caramelos hay de cada color, pero no cuantos hay en total, por lo que deberemos realizar una suma de todos los caramelos de distintos colores para conocer el dato del total de caramelos que hay en la bolsa. Realizamos la operación de la suma, sumando todos los colores de caramelos.

6+5+3+3+2+4+2+5=30

Al realizar esta operación obtenemos que hay en la bolsa un total de 30 caramelos.

Con el dato total de caramelos, procedemos a saber cuál es la probabilidad de que al meter la mano y sacar un caramelo, el caramelo sea de color rojo.

Como ya sabemos, a este resultado podrían haber llegado distintas formas, todas ellas correctas si el resultado es que el total de caramelos es 30. Por ejemplo podríamos haber contado los caramelos uno por uno, sumar los caramelos por bloques, en vez de sumarlos todos de vez, etc.

Llegados a este punto los alumnos podrían utilizar los conocimientos sobre fracciones, para lograr la respuesta, podrían utilizar una regla de tres.

En este caso vamos a utilizar la resolución mediante el uso de las fracciones. Sabemos que tenemos 6 caramelos rojos y un total de 30 caramelos, de esta forma, del total tenemos $\frac{6}{30}$ de caramelos rojos. Realizamos la división de 6÷30=0.2

Sabiendo la relación de las fracciones con los porcentajes multiplicamos el resultado por 100, lo que nos da un 20%. Al ver las distintas opciones de respuesta que nos ofrecía el problema, observamos que el 20% es una opción sugerida, lo que nos hace llegar a la conclusión de que la solución es correcta.

En el caso de que queramos llegar a la solución de otra forma, o por si queremos realizar la comprobación, podemos hacerlo mediante la regla de tres por ejemplo. Sabiendo que hay 6 caramelos rojos del total que es 30, si el total fuesen 100 caramelos, ¿cuántos de ellos serian rojos?

Realizamos las operaciones necesarias, las cuales son 6x100=600 y 600÷30=20. Obteniendo como resultado un 20%.

Otra manera de resolver el problema, y que se basaría en las fases de la creatividad que proponía Poincaré, sería realizar una explicación de la materia y posteriormente plantear un problema para que estuviesen pensando y reflexionando sobre él y resolverlo la próxima sesión.

En este caso la clase trataría de las medidas de longitud, explicando las distintas medias de longitud que existen, y las conversiones entre unas medidas y otras. Al llegar el final de la clase se les propondrá un problema como el siguiente, para que lo empiecen a reflexionar sobre él durante el final de la clase y resolverlo el siguiente día.

“Héctor tiene una cinta que mide 10m. Karla tiene otra de 1040 cm. ¿Quién tiene la cinta más larga?”(p.96)

Al proponerles este problema, y no darles el suficiente tiempo en la clase para resolverlos, y dejarles claro que no es un problema de deberes, sino que simplemente tienen que reflexionar sobre él y pensar formas de resolverlo, la próxima sesión los alumnos llevarán una serie de respuestas para poder resolver el problema. De esta forma, los alumnos al plantearles el problema leerán el problema varias veces, buscarán semejanzas del problema con otros problemas previamente resueltos y plantearse preguntas acerca de él. En el momento de finalizar la clase será el momento en el que pasarán a la fase dos, la cual trata de reposar los conocimientos y sea el inconsciente el que actúe. Los alumnos estarán en esta fase hasta que les llegue la respuesta, que será cuando pasen a la siguiente fase, aunque debido a que se les ha pedido que consigan resolverlo de varias formas, al encontrar una respuesta deberán volver a la fase dos, haciendo que trabaje el inconsciente para volver a encontrar una respuesta al problema. Finalmente, al comenzar la siguiente clase, y con las respuestas que cada alumno haya encontrado, tras ponerlas en común, pasarán a la última fase, en la cual tendrán que comprobar que las respuestas que han encontrado para resolver este problema son correctas, aplicando dichas soluciones.

Debido a que los alumnos pensarían distintas formas posibles de resolver el problema, vamos a plantear varias a continuación.

Lo primero que se debe hacer, dado que las medidas que el problema ofrece no son la misma unidad hay que ponerlas en la misma unidad. A la hora de realizar esta conversión, hay muchas maneras, dado que se pueden poner en cualquier unidad de longitud posible, pero las más comunes serían o pasar a metros la longitud que está en centímetros o pasar la que está en centímetros a metros, dado que así solo operamos con una medida de longitud, no con las dos.

Si pasamos la medida de metros a centímetros, que es la más sencilla, debido a que no trabajamos con decimales, obtenemos que la cinta de Héctor, que previamente medía 10 metros, ahora mide 1000 centímetros. Al tener ambas medidas en centímetros solo debemos realizar una comparación para saber qué número es mayor. Comparamos 1000 con 1040, y obtenemos que la cinta de Karla mide 40 centímetros más.

En el caso de que hubiésemos realizado la conversión de centímetros a metros, hubiésemos obtenido que la cinta de Karla mide 1´04 metros. Se realiza la comparación entre 1 metro y 1´04 metros y obtenemos que la cinta de Karla mide 0´04 metros más.

Otra manera de resolver el problema, y sin utilizar operaciones matemáticas sería coger y cortar una cinta o cuerda con una medida de 10 metros, y cortar otra con una medida de 1040 centímetros. Al tener estas dos cintas, de forma física, podemos colocarlas una al lado de otra y saber que la cinta de Karla es más larga. La única objeción que habría en resolverlo así sería que no sabríamos cuanto más larga es, pero eso no lo pide el problema en este caso.

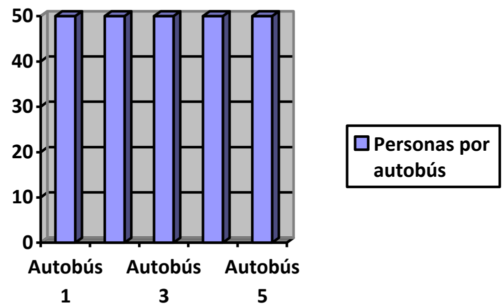
Otra forma de favoreceré el uso de la creatividad en los alumnos sería poner una lista de 5-6 problemas, con distintos enunciados y operaciones y decirles que deben resolver todos, e intentar resolverlos de maneras diferentes, utilizando distintas estrategias para llegar a la respuesta. Por ejemplo, si en un problema, cuya estrategia de resolución más rápida es la multiplicación, al siguiente de ese tipo resolverlo mediante otras operaciones, o materiales manipulativos, gráficos…

“Carmen salió de casa con 50€ para hacer la compra. Primero, gastó 27€ en la pescadería y, después, 14€ en la frutería. ¿Cuánto dinero le sobró?”(Chamoso, Vicente, Manchado & Múñez, 2014, p. 268)

Al plantearles este problema, los alumnos rápidamente recurrirían al método de realizar dos restas, o en otro caso, realizar una suma y una resta, pero en este caso, al plantearles este problema se les agrupa en grupos y se les da un bote con 50 canicas, el cual deben utilizar para resolver este problema. De esta forma, sabiendo que la caja tiene 50 canicas, los alumnos deberán coger las canicas de la caja y primero sacar 27 canicas, luego sacar 14 canicas más, y contar las canicas que quedan en la caja, obteniendo un resultado de 9 canicas, que es el dinero que le sobró a Carmen después de comprar.

“A un lago han llegado 5 autocares con 50 personas en cada uno. ¿Cuántas personas han llegado?”(Chamoso, Vicente, Manchado & Múñez, 2014, p. 268)

Para resolver este problema se les pide a los niños que dibujen una gráfica con el número de autobuses y las personas que hay en cada uno, para que de esta manera pudieran observar de una forma más clara los datos que ofrece el problema para facilitar su resolución.



Al observar la gráfica obtenemos que todos los autobuses tienen la misma gente dentro, por lo que podemos realizar la operación de la multiplicación. De esta forma multiplicamos 50x5, obteniendo como resultado 250 personas han llegado al lado.

“Un sello mide 6 cm y 4 mm de largo y 3 cm y 7 mm de ancho. ¿Cuántos milímetros mide de largo más que de ancho?”(Chamoso, Vicente, Manchado & Múñez, 2014, p. 269).

Al leer este problema, en el cual nos piden que comparemos la largura y la anchura de un sello, lo primero que debemos hacer es tener las medidas en la misma unidad de longitud, sabiendo que 1 centímetro, equivale a 10 milímetros, realizamos la conversión y sumamos y obtenemos que de largo mide 64 milímetros y de ancho 37 milímetros. Para realizar esta comparación, el profesor lleva a clase bloques de construcciones de la misma medida, y los reparte a la clase formando dos grupos. Un grupo debe coger 64 bloques y ponerlos en fila, sin separación entre ellos, mientras que el otro grupo, debe coger 37 bloques, y colocarlos al lado de los bloques del otro grupo de la misma manera, en fila y sin separación entre ellos. Al finalizar de colocar los bloques, observaremos que la fila que marca la largura del sello es más larga, y solamente tendremos que contar los bloques que hay de más en esa fila, obteniendo que hay 27 bloques más, lo que nos indica que mide 27 milímetros más de largo que de ancho.

"En un hormiguero hay 4 millones de hormigas. Cada una mide 3 mm de largo. Si se colocasen todas en fila, sin dejar ningún espacio entre ellas, ¿la longitud de la fila sería mayor o menor de 10 km?"(Chamoso, Vicente, Manchado & Múñez, 2014, p. 269)

Este problema, al haber una situación, la cual utiliza números grandes y además, es una situación inusual, se realiza la resolución de problemas de una forma más tradicional, realizando las operaciones oportunas. Aun con todo, para no trabajar con números tan grandes, se va a realizar previamente una compensación de los números, realizando una omisión de ceros. Primero, al haber dos unidades de longitud, realizamos una conversión desde la más grande a la más pequeña. De esta forma obtenemos que 10 kilómetros son lo mismo que 10.000.000 milímetros. Si realizamos la omisión de ceros en 10.000.000 y en 4.000.000, nos quedan que hay 4 hormigas, que miden 3 milímetros, y queremos saber si la fila sería mayor o menor de 10 milímetros. De esta manera, realizar las operaciones nos resulta mucho más fácil. Multiplicamos 4x3, obteniendo un resultado de 12 milímetros, el cual, al realizar la comparación con 10, obtenemos que la longitud de la fila de hormigas sería mayor de 10.

"Leonor compra doce cuartos de kilo de garbanzos y Concha compra seis medios kilos. ¿Cuántos kilos compran cada una? ¿Quién compra más?"(Chamoso, Vicente, Manchado & Múñez, 2014, p. 269)

Nos encontramos ante un problema que nos ofrece una comparación entre medidas de masa. Para resolver este problema, el cual tiene dos preguntas, lo primero que se debe hacer es igualar la medida de masa de ambas compras, como en una pregunta nos piden saber los kilos, realizamos la conversión a kilos. Para resolver esta conversión, se les ofrece a los niños una serie de cuadrados, unos enteros formados, otros divididos en grupos de cuatro y otros divididos en dos, para hacer una comparación con los kilos enteros, los cuartos y los medios. De este modo, los alumnos deben coger doce cuartos de cuadrados y formar cuantos cuadrados sea posible. Por otro lado, deberán coger seis medios cuadrados y formar cuadrados también. De esta manera, al formar los cuadrados se darán cuenta que en ambos casos tienen tres cuadrados, dando como resultado que cada una compra tres kilos de comida, por lo que ninguna compra más que la otra.

BIBLIOGRAFÍA

Aguilar, M. y Navarro, J.L. (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. Revista de Psicología General y Aplicada, 53(1), pp. 63-83

Alcaíno, J. B., & Goñi, J. O. (2016). Una revisión de tres modelos para enseñar las habilidades de pensamiento en el marco escolar. Perspectiva Educacional, Formación de Profesores, 55(1), 94-113. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/3333/333343664007.pdf

Alfaro, C. (noviembre, 2006). Las ideas de Pólya en la resolución de problemas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 1, 27-45. Recuperado de: http://imm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/3/6

Allueva, P. (2011). Aprender a pensar y enseñar a pensar. Proceso de resolución de problemas. En J. M. Román, M. A. Carbonero y J. D. Valdivieso (Comp.), Educación, aprendizaje y desarrollo en una sociedad multicultural. Madrid: Asociación de Psicología y Educación.

Álvarez, E. (2010). Creatividad y pensamiento divergente. Desafío de la mente o desafío del ambiente. InterAct. Recuperado de: http://brd.unid.edu.mx/recursos/Taller%20de%20Creatividad%20Publicitaria/TC0

5/para%20ampliar%20el%20tema%20PDF/Creatividad%20y%20pensamiento%20divergente.pdf

Araya Ramírez, N. (2014). Las habilidades del pensamiento y el aprendizaje significativo en matemática de escolares de quinto grado en Costa Rica. Actualidades investigativas en educación, 14(2), 66-95. Recuperado de: https://www.scielo.sa.cr/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1409-47032014000200003

Ayllón, M., Gómez, I., & Ballesta-Claver, J. (2016). Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. Propósitos y Representaciones, 4(1), 169-218. Doi: http://dx.doi.org/10.20511/pyr2016. v4n1.89

Barquero, Berta et al. Promoviendo la creatividad matemática a través del diseño colaborativo de c-unidades. In: GONZÁLEZ, MARÍA TERESA et al. (Org.). Investigación en educación matemática XVIII. Salamanca: Seiem, 2014. p. 157-166. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/5872/1/Barquero2014PromoviendoSEIEM.pdf

Calderón Lorca, P. (2014).Percepciones de los y las Docentes del Primer Ciclo Básico, sobre la implementación del Método Singapur en el Colegio Mario Bertero Cevasco de la Comuna de Isla de Maipo. Recuperado de: http://repositorio.uchile.cl/handle/2250/130579

Castro Martínez, E. (2008) Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. [Archivo PDF] Recuperado de: https://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Seminario2Castro.pdf

Coral, A.L. (2014). DESARROLLO DE HABILIDADES DE PENSAMIENTO Y CREATIVIDAD COMO POTENCIADORES DE APRENDIZAJE. Revista UNIMAR, 30(1). Recuperado de http://editorial.umariana.edu.co/revistas/index.php/unimar/article/view/232

Echenique Urdiain, I. (2006, Diciembre) Matemáticas resolución de problemas [archivo PDF]. Recuperado de http://ceip-parquedelamuneca.centros.castillalamancha.es/sites/ceip-parquedelamuneca.centros.castillalamancha.es/files/descargas/Matematicas_ResolucionProblemasInstrumenta2.pdf

Ejercicios de MATEMÁTICAS para primaria (1º a 6º) en PDF. (2020). Recuperado de: https://juegosinfantiles.bosquedefantasias.com/blog/cuadernos-ejercicios-matematicas-primaria

Esquivias, M. T. (2004) Creatividad: definiciones, antecedentes y aportaciones. Revista Digital Universitaria. 5, 1. Recuperado el abril de 2020 de: https://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art4/ene_art4.pdf

Fraile Rey, M. A. (2019). Análisis de procesos de resolución de problemas en preguntas liberadas de TIMSS-2011. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 7(2), 38-54. Recuperado de: http://edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/60/58

González, A. (2020, Marzo 10) Matemáticas: ¿Qué es el método Singapur? Hop´Toys. Recuperado de: https://www.bloghoptoys.es/el-metodo-singapur-aprender-matematicas-sin-memorizar/

Güell, M. (2008) *El mundo desde Nueva Zelanda".* Barcelona: Graó

Guilera Agüera, L. (2011) Anatomía de la creatividad, Sabadell, España, Editorial Fundació Del Disseny Tèxtil. Recuperado de: https://esdi.es/wp-content/uploads/2018/04/Anatomia-de-la-creatividad.pdf

Malaspina, U. (2013, Julio). La enseñanza de las matemáticas y el estímulo a la creatividad. Revista Didáctica de las Matemáticas, n.63

Martínez, S. B., & Brendy, S. (2015). Método Pólya en la resolución de problemas matemáticos. Quetzaltenango. Escaso Monitoreo y acompañamiento orientado al Desconocimiento de los uso de estrategias. Recuperado de: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/54260501/Escalante-Silvia.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DEscalante-

Silvia.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-Credential=ASIATUSBJ6BAECPY2IMH%2F20200527%2Fus-east-1%2Fs3%2Faws4_request&X-Amz-Date=20200527T084109Z&X-Amz-Expires=3600&X-Amz-SignedHeaders=host&X-Amz-Security-Token=IQoJb3JpZ2luX2VjEGAaCXVzLWVhc3QtMSJIMEYCIQCwMJfC%2BgS8tzAAIGfI0XkJEZaT7Fo9BDCIr3xuzmxV5gIhAOq5MV4hTKOeZ3phcS7mHs9mwMIaidjKg1m94cSWB67LKr0DCLn%2F%2F%2F%2F%2F%2F%2F%2F%2F%2FwEQABoMMjUwMzE4ODExMjAwIgxgxUtv0k7GypIA3OwqkQNUZwZOV98EDTj0%2ByG70PjkyzZzot5zXExj0bgqCcwk26zEHurG0QUZI0ZoASmiWUM89n7VW00LtCHOGKXAcs1%2FxnnVMFj5m53sf6Zj8dea0OzvVUazMx%2Bq%2ByGi1krDQe5vz0qStZTOPQSS%2F9eRasjWhmziKJSJxM5mBeacnsESKYM0r4cxdgC44D0jf%2Bh9Q5PrehnQKBZHpWEIiqTZwsLqM%2FkrggHQdXoFqy3FRCfly%2BVqq49loUheLzc9Qgwvc6ubTAVNpDk3QqfYtny2J6x9D7ylxpaN16EQiWgZIMvuMnOm8wRArTTrwNvj48u%2Bja5B3U1jJynNaNaukI1yXmilkn41sUSU5NRtaoAKFD%2BxAJo79Ba%2Fz%2BeR0Fxm2d4FF0vDHnEQUKPssb1o1YkvKeESb0HELzeubII03QbIwv2gvxsTH7AGifH2SoXIQtjCYwPI5t%2BquhCiPSezKjf1VfX3y2W8Q0JoQULd4ivB0WY%2BxTDhhsEjthzTZuzvwBjPZ98BQyRXiE7L7FaZw18qZZ821jDqrbj2BTrqAUpek6ywGyBYmTXw4BeEbVC40ghtERUs81ihDyLYlTFbrAg1igVQhSeO1Y5%2BqY5U05nrkTxlNnD%2FA%2Bdu9FzLnuU2cEMyS8pcYbLBkZwRWEn%2BxXtsZ%2BM6LFYi%2FXu3i9lmfSt7KLWgkbs6J49ilHqCavGTEQwW3stBE7uhcySY3P%2F8FhNBpWQB1n8OcFtrGPKYy86cWMytu8tWybma63vJ9bPr9jBzFVmtt0%2FDmituNcRgtFWpPNLMgUlZXmFxPoHWV3q4ikm2vYLSbUFnYy3fBnqgc3QW0UccqSCl3Q2JoDZpGTFb1b3ym9mbiQ%3D%3D&X-Amz-Signature=5aef28f00fe9b543cd241b3d3879852a7bebb60bb702179c46ded3ccc433fcfe

Meneses Vera, M. N. (2018). Fortaleciendo procesos pedagógicos y didácticos en el área de matemática, a través de comunidades profesionales de aprendizaje de la IE N° 38078 Mx/M de Muyurina–Quinua de Ayacucho. Recuperado de: http://repositorio.uarm.edu.pe/bitstream/UNIARM/754/1/Meneses%20Vera%2c%20Miryan%20Nancy_Trabajo%20de%20investigaci%c3%b3n_Segunda%20Especialidad_2018.pdf

Moliner, M. (1998), *Diccionario de Uso del Español*, España, Editorial Gredos.

Sánchez, J. M. C., Vicente, S., Manchado, E., & Múñez, D. (2014). Los Problemas de Matemáticas Escolares de Primaria, ¿son solo Problemas para el aula? Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 261-279. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/18924/19038

Sorando, J.M. (s.f.) matemáticasentumundo.es. Recuperado de: http://matematicasentumundo.es/

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA: *Diccionario de la lengua española*, 23.ª ed., [versión 23.3 en línea]. Recuperado de: https://dle.rae.es/ (2020).

Verdejo Cobos, J. A. (2015). Evaluación de ideas previas de estadística y probabilidad en futuros profesores de primaria ante la prueba PISA. Recuperado de: https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/40559/TFG_Jose_Antonio_Verdejo_Cobos.pdf?sequence=1&isAllowed=y